Matrices.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 528 : N°**21**, **23**, **24**, **25**
Page 529 : N°**27**, **28**, **29**, **33**
Page 530 : N°**38**
Page 531 : N°**47**, **52**, **54**, **56**

N°21 page 528

1. On a immédiatement :

$$\boxed{a_{11} = 1,\ a_{13} = 3,\ a_{23} = 1,\ a_{31} = -1 \text{ et } a_{32} = 2.}$$

2. De même:

$$\boxed{a_{11} = -2,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = 3,\ a_{31} = 0 \text{ et } a_{32} = -2.}$$

N°24 page 528

Il vient immédiatement :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

N°23 page 528

a) Le nombre « 5 » du tableau signifie que l'équipe C a récupéré 5 marques rouges.

b) Pour obtenir le nombre de marques collectées par l'équipe B, il suffit d'additionner les trois éléments du tableau se trouvant dans la deuxième colonne : $7+8+3=18$.
L'équipe B a ainsi collecté 18 marques au total.

Nous procédons de façon similaire pour les équipes A et C :
Equipe A : $4+1+4=9$
Equipe C : $5+2+6=13$
C'est donc l'équipe B qui a gagné puisque c'est elle qui a collecté le plus de marques.

c) Pour obtenir le nombre total de marques collectées, il suffit d'additionner les nombres de marques collectées par chacune des équipes : $18+9+13=40$.

N°25 page 528

A chaque fois, on égalise les coefficients correspondants pour obtenir un système.

a) On a :

$$A=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1-x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x^2+x+1 & 3-x \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ x=x^2 \\ 1-x=x^2+x+1 \\ 3=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x^2+2x=0 \\ -x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

$$\boxed{A=B \Leftrightarrow x=0}$$

b) On a :

$$A=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2x \\ x^2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & x-3 & 0 \\ 0 & 6x-2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ 4=4 \\ 2x=4 \\ x^2=4 \\ -1=x-3 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 10=6x-2 \\ \frac{x}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ x^2-4=0 \\ x-2=0 \\ 6x-12=0 \\ \frac{x}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$$\boxed{A=B \Leftrightarrow x=2}$$

N°27 page 529

$$
\begin{aligned}
2A+3B &= 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 1+3\times(-1) & 2\times 2+3\times 0 & 2\times(-2)+3\times 3 \\ 2\times(-3)+3\times 4 & 2\times 0+3\times 5 & 2\times 4+3\times(-2) \\ 2\times 2+3\times 1 & 2\times 1+3\times 2 & 2\times 5+3\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 2 \\ 7 & 8 & 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{2A+3B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 6 & 15 & 2 \\ 7 & 8 & 16 \end{pmatrix}}
$$

$$
\begin{aligned}
3C+2I_3 &= 3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\times 3+2\times 1 & 3\times 4+2\times 0 & 3\times 1+2\times 0 \\ 3\times(-2)+2\times 0 & 3\times 1+2\times 1 & 3\times 3+2\times 0 \\ 3\times 0+2\times 0 & 3\times(-2)+2\times 0 & 3\times 1+2\times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 \\ -6 & 5 & 9 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{3C+2I_3 = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 \\ -6 & 5 & 9 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}}
$$

$$-2A+3C=-2\begin{pmatrix}1&2&-2\\-3&0&4\\2&1&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&4&1\\-2&1&3\\0&-2&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2\times1+3\times3&-2\times2+3\times4&-2\times(-2)+3\times1\\-2\times(-3)+3\times(-2)&-2\times0+3\times1&-2\times4+3\times3\\-2\times2+3\times0&-2\times1+3\times(-2)&-2\times5+3\times1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7&8&7\\0&3&1\\-4&-8&-7\end{pmatrix}$$

$$\boxed{-2A+3C=\begin{pmatrix}7&8&7\\0&3&1\\-4&-8&-7\end{pmatrix}}$$

N°28 page 529

$$2A+3B=\begin{pmatrix}0&8\\7&-1\end{pmatrix}$$
$$-3A+2B=\begin{pmatrix}-13&-12\\9&8\end{pmatrix}$$
$$A-4B=\begin{pmatrix}11&4\\-13&-6\end{pmatrix}$$

N°29 page 529

$$2A=\begin{pmatrix}4&6&-10\\8&0&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$$
$$-3B=\begin{pmatrix}9&-6&-3\\0&-3&-9\\-6&3&-12\end{pmatrix}$$
$$A+B=\begin{pmatrix}-1&5&-4\\4&1&4\\1&0&7\end{pmatrix}$$

$$3A-B=\begin{pmatrix} 9 & 7 & -16 \\ 12 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-2A+4B=\begin{pmatrix} -16 & 2 & 14 \\ -8 & 4 & 10 \\ 10 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

N°33 page 529

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 2+1\times 3+4\times 4 \\ 0\times 2+2\times 3+1\times 4 \\ 4\times 2+2\times 3+3\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\times 2+2\times(-1)+3\times 3 \\ 1\times 2+(-2)\times(-1)+4\times 3 \\ 0\times 2+5\times(-1)+1\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}$$

N°36 page 529

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 10 & 12 \\ 8 & 0 & 10 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 17 & 12 \\ 12 & 7 & -4 & 0 \\ 14 & 3 & 15 & 13 \\ -8 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

N°38 page 530

A la calculatrice ou avec Xcas ou avec un tableur ou … à la main (!), on obtient :

$$A\times B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -0,5 & 1,5 \\ 0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1,5 & -0,5 & 0,5\\ 1,5 & -0,5 & 1,5\\ 0,5 & -0,5 & 1,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

Les matrices *A* et *B* sont dites « inverses ».

N°47 page 531

a) On obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0,75 & 0,25\\ 0,25 & 0,75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

On vérifie bien que l'on a : $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I_2$.

b) On obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1,5 & -2 & 0,5\\ 0,5 & 1 & -0,5\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

On vérifie bien que l'on a : $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I_3$.

N°52 page 531

a) On obtient :

$$\boxed{A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\text{ et }A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 4 & 1 & 12\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}}$$

b) On cherche trois réels a, b et c tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3$.
En utilisant les résultats de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
& A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1+a+c & a & 4+b \\ 4+3a+b & 1+3a+c & 12+a+3b \\ 4+a+b & 4+b & 1+4a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 1+a+c=0 \\ a=0 \\ 4+b=0 \\ 4+3a+b=0 \\ 1+3a+c=0 \\ 12+a+3b=0 \\ 4+a+b=0 \\ 4+b=0 \\ 1+4a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \\ c=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{A^3 - 4A - I_3 = 0_3}$$

c) On a :

$$A^3 - 4A - I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A\left(A^2 - 4I_3\right) = I_3$$

On en déduit immédiatement que la matrice A est inversible de matrice inverse la matrice $A^2 - 4I_3$:

$$A^{-1} = A^2 - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

N°54 page 531

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{17}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\ 3 & -17 & 4\\ 2 & -16 & 5\end{pmatrix}$$

2. a. On a immédiatement :

$$(S_1)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -3\end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=B \text{ avec } B=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$$

b. La matrice A étant inversible, on a :

$$AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{17}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{5}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\ 3 & -17 & 4\\ 2 & -16 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ -3\end{pmatrix}$$

On vérifie que le triplet $(2\,;-2\,;-3)$ est bien solution du système (S_1).

Le système (S_1) admet pour unique solution le triplet $(2\,;-2\,;-3)$.

3. On a cette fois :

$$(S_2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=B_2 \text{ avec } B_2=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$AX=B_2\Leftrightarrow X=A^{-1}B_2\Leftrightarrow X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 6 & -1\\ 3 & -17 & 4\\ 2 & -16 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}15\\ -46\\ -40\end{pmatrix}$$

On vérifie que le triplet $\left(\frac{15}{7}\,;-\frac{46}{7}\,;-\frac{40}{7}\right)$ est bien solution du système (S_2).

Le système (S_2) admet pour unique solution le triplet $\left(\frac{15}{7}\,;-\frac{46}{7}\,;-\frac{40}{7}\right)$.

N°56 page 531

1. La matrice A est inversible et on a, à la calculatrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

On a alors, classiquement :

$$AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'équation $AX = C$ admet pour unique solution la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. D'après les lignes de commande Xcas fournies, les matrices A et C ont d'abord été saisies (1ère ligne) puis on a effectué le calcul (2ème ligne) : $\left(I_2 - \frac{1}{2}A\right)^{-1} C$.

Ce calcul découle de la résolution suivante :

$$(E_1) : \frac{1}{2}AX + C = X \Leftrightarrow C = X - \frac{1}{2}AX \Leftrightarrow C = I_2X - \frac{1}{2}AX = \left(I_2 - \frac{1}{2}A\right)X$$

On a :

$$I_2 - \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

A la calculatrice, on obtient :

$$\left(I_2 - \frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\left(E_1\right):\frac{1}{2}AX+C=X\Leftrightarrow C=\left(I_2-\frac{1}{2}A\right)X\Leftrightarrow X=\left(I_2-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\times C$$

D'où :

$$X=\left(I_2-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\times C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

L'équation $\left(E_1\right):\frac{1}{2}AX+C=X\ \ AX=C$ admet pour unique solution

la matrice colonne $X=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

3. a. En raisonnant comme ci-dessus, il vient :

$$\left(E_2\right):AX+C=X\Leftrightarrow C=X-AX\Leftrightarrow C=I_2X-AX=\left(I_2-A\right)X$$

Mais cette fois, on a :

$$I_2-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,75&0,25\\0,25&0,75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible (d'après la calculatrice ou en résolvant $\left(I_2-A\right)X=Y$).
Pour résoudre l'équation $\left(E_2\right)$, on revient à un système :

$$\begin{aligned}&\left(E_2\right):AX+C=X\Leftrightarrow C=\left(I_2-A\right)X\\&\Leftrightarrow\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow x-y=2\Leftrightarrow y=x-2\end{aligned}$$

L'équation $\left(E_2\right)$ admet une infinité de solution. Ce sont les matrices colonnes de la forme $\begin{pmatrix}x\\x-2\end{pmatrix}$ où x est un réel quelconque.

b. On cherche la solution de (E_2) dont la somme des coefficients vaut 1.

D'après la question précédente, une telle solution est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix}$.

La condition s'écrit : $x+(x-2)=1$, soit $2x=3$ et, finalement : $x=\frac{3}{2}$.

Pour $x=\frac{3}{2}$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La solution de (E_2) dont la somme des coefficients vaut 1 est la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$