
Puissances de matrices.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 519 : N°9

Page 532 : N°63, 67

Page 533 : N°69, 70

Page 535 : N°74

Page 536 : N°76

Page 542 : N°92

N°9 page 519

1. Pour pouvoir calculer la matrice B, nous avons besoin de la matrice P^{-1} .

A la calculatrice ou à la main, on obtient facilement :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$B = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
--

2. De l'égalité $B = P^{-1} \times A \times P$, on tire :

$$B \times P^{-1} = (P^{-1} \times A \times P) \times P^{-1} = (P^{-1} \times A) \times (P \times P^{-1}) = (P^{-1} \times A) \times I_2 = P^{-1} \times A$$

Puis, de l'égalité : $B \times P^{-1} = P^{-1} \times A$:

$$P \times (B \times P^{-1}) = P \times (P^{-1} \times A) = (P \times P^{-1}) \times A = I_2 \times A = A$$

Finalement, on a : $A = P \times B \times P^{-1}$.

On montre classiquement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \times B^n \times P^{-1}$.

La matrice B étant diagonale, on a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A^n &= P \times B^n \times P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 4^n \\ 5^n & 2 \times 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 4^n & -5^n + 4^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 4^n & -5^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 5^n - 4^n & -5^n + 4^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 4^n & -5^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}$$

N°63 page 532

1. A la calculatrice, on obtient :

$$B^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = B$$

2. A partir des résultats précédents, il vient : $B^4 = B^3 \times B = B \times B = B^2$.

Puis : $B^5 = B^4 \times B = B^2 \times B = B^3 = B$. Etc.

On peut ainsi conjecturer que toute puissance d'exposant impair de la matrice B est égale à B elle-même, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, B^{2n+1} = B$.

Montrons cette conjecture par récurrence.

Initialisation.

Pour $n=0$, on a : $B^{2n+1} = B^{2 \times 0 + 1} = B^1 = B$.

La propriété est donc vraie pour $n=0$.

Hérédité.

Supposons que l'on ait $B^{2n+1} = B$ pour un entier naturel n quelconque fixé.

Il vient alors :

$$B^{2(n+1)+1} = B^{2n+2+1} = B^{(2n+1)+2} = B^{2n+1} \times B^2 \underbrace{=}_{\text{hypothèse de récurrence}} B \times B^2 = B^3 \underbrace{=}_{\text{d'après la 1ère question}} B$$

La propriété est ainsi vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Conclusion.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n .

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, B^{2n+1} = B$.

N°67 page 532

1. On obtient facilement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette question il convient de montrer que les puissances de la matrice A ont une certaine forme générale.

Nous allons établir ce résultat par récurrence pour tout entier naturel n .

Initialisation.

C'est bien le cas pour $n=0$ puisque en posant $a_0 = b_0 = 0$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 \\ 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$$

C'est aussi le cas pour A (on a $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$) et, d'après la première question, pour A^2 (on a $a_2 = 2$ et $b_2 = 1$) et A^3 (on a $a_3 = b_3 = 3$).

En toute rigueur, il n'est absolument pas obligatoire d'effectuer cette vérification pour les matrices A , A^2 et A^3 .

Hérédité.

On suppose que pour un entier naturel quelconque fixé, A^n est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_n+1 & a_n+b_n \\ 0 & 1 & a_n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi une matrice dont la structure est conforme à la structure générale prévue. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et on en déduit les relations de récurrence cherchées pour les suites (a_n) et (b_n) :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

Conclusion.

Pour tout entier naturel n , la matrice A^n est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

- 3.** La relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + 1$ nous permet de conclure que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1. Comme $a_0 = 0$, il vient immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n$. La deuxième relation de récurrence, $b_{n+1} = a_n + b_n$, se récrit ainsi : $b_{n+1} = b_n + n$. On a donc :

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + n - 1 \\ b_{n-1} &= b_{n-2} + n - 2 \\ b_{n-2} &= b_{n-3} + n - 3 \\ &\dots \\ b_2 &= b_1 + 1 \\ b_1 &= b_0 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces n égalités et en tenant compte de $b_0 = 0$, il vient :

$$b_n + (b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_2 + b_1) = (b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_2 + b_1) + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$\text{Soit : } b_n = 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n \text{ et } b_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

N°69 page 533

1. a. On s'intéresse à la période $n+1$.

Les juvéniles sont mises au monde par :

- les pré-adultes à raison de 6 en moyenne par pré-adultes. L'effectif des pré-adultes étant de y_n , leur contribution s'élève donc à : $6y_n$.
- Les adultes à raison de 10 en moyenne par adulte. L'effectif des adultes étant de z_n , leur contribution s'élève donc à : $10z_n$.

En définitive, on a : $x_{n+1} = 6y_n + 10z_n$.

On nous précise par ailleurs que seul « un rongeur sur deux survit à sa première année ». La population des pré-adultes de la période $n+1$ est donc égale à la moitié de celle des juvéniles de la période n : $y_{n+1} = \frac{x_n}{2}$.

Enfin, on nous précise que « seulement 40% des rongeurs qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année ». La population des adultes de la période $n+1$ représente donc 40% de celle des pré-adultes de la période n : $z_{n+1} = 0,4y_n = \frac{2}{5}y_n$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6y_n + 10z_n \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{2} \\ z_{n+1} = \frac{2}{5}y_n \end{cases}$$

b. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6y_n + 10z_n \\ y_{n+1} = \frac{x_n}{2} \\ z_{n+1} = \frac{2}{5}y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 0 \times x_n + 6 \times y_n + 10 \times z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} \times x_n + 0 \times y_n + 0 \times z_n \\ z_{n+1} = 0 \times x_n + \frac{2}{5} \times y_n + 0 \times z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

La dernière égalité équivaut à $U_{n+1} = A \times U_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A \times U_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Nous ne détaillons pas le raisonnement pas récurrence qui est des plus classiques.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n \times U_0$$

3. On a ici $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$ et on cherche U_1 , U_5 et U_{10} .

D'après la question précédente :

$$U_1 = A^1 \times U_0 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$U_5 = A^5 \times U_0 = \begin{pmatrix} 12 & 62 & 90 \\ \frac{9}{2} & 12 & 10 \\ \frac{2}{5} & \frac{18}{5} & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,200 \\ 800 \\ 160 \end{pmatrix}$$

$$U_{10} = A^{10} \times U_0 = \begin{pmatrix} 459 & 1\,812 & 2\,240 \\ 112 & 459 & 585 \\ \frac{117}{5} & \frac{448}{5} & 108 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102\,400 \\ 25\,600 \\ 5\,120 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}, U_5 = \begin{pmatrix} 3\,200 \\ 800 \\ 160 \end{pmatrix} \text{ et } U_{10} = \begin{pmatrix} 102\,400 \\ 25\,600 \\ 5\,120 \end{pmatrix}$$

4. On suppose ici : $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $U_5 = A^5 \times U_0 = \begin{pmatrix} 4\,760 \\ 860 \\ 280 \end{pmatrix}$ et $U_6 = A^6 \times U_0 = \begin{pmatrix} 7\,960 \\ 2\,380 \\ 344 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{x_6}{x_5} = \frac{7\,960}{4\,760} = \frac{199}{119} \approx 1,67$.

Puis : $U_{10} = A^{10} \times U_0 = \begin{pmatrix} 135\,640 \\ 34\,540 \\ 6\,680 \end{pmatrix}$ et $U_{11} = A^{11} \times U_0 = \begin{pmatrix} 274\,040 \\ 67\,820 \\ 13\,816 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{x_{11}}{x_{10}} = \frac{274\,040}{135\,640} = \frac{6\,851}{3\,391} \approx 2,02$.

Enfin : $U_{15} = A^{15} \times U_0 = \begin{pmatrix} 4\,370\,360 \\ 1\,091\,660 \\ 218\,680 \end{pmatrix}$ et $U_{16} = A^{16} \times U_0 = \begin{pmatrix} 8\,736\,760 \\ 2\,185\,180 \\ 436\,664 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{x_{16}}{x_{15}} = \frac{8\,736\,760}{4\,370\,360} = \frac{218\,419}{109\,259} \approx 1,999$.

Il semble que le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ tende vers 2. Je vous confirme que c'est effectivement le cas ! ☺ Nous nous permettons donc de conclure audacieusement :

La suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

N°70 page 533

1. Pour tout entier naturel n , on a, en tenant compte de la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) :

$$A \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien l'égalité cherchée.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Nous menons un raisonnement par récurrence.

Initialisation.

Pour $n=0$, on a : $A^0 = I_2$ et, par ailleurs :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^0 & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

L'égalité est ainsi vérifiée pour $n=0$. La propriété est initialisée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que l'on a : $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A^n \times A = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0 \times \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) & 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

L'égalité est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion.

Pour tout entier naturel n , on a : $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A partir de l'égalité obtenue à la question 1, on montre par une récurrence immédiate que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En tenant compte du résultat obtenu à la question précédente, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} &= A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ 0 \times u_0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

4. Comme $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et, pour toute valeur du réel u_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 0. \text{ Finalement : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 0 + 2 - 0 = 2.$$

Finalement :

La limite de la suite (u_n) est indépendante de son premier terme u_0 et vaut 2.

N°74 page 535

1. a. Notons UB, UR et UV respectivement les événements « L'urne choisie est blanche », « L'urne choisie est blanche » et « L'urne choisie est verte ». Du fait de l'hypothèse d'équiprobabilité, on a : $p(\text{UB}) = p(\text{UR}) = p(\text{UV}) = \frac{1}{3}$. Ces trois événements forment une partition de l'univers.

Notons lors B_n , R_n et V_n respectivement les événements « On obtient une boule blanche au n -ième tirage », « On obtient une boule rouge au n -ième tirage » et « On obtient une boule verte au n -ième tirage ».

La formule des probabilités totales nous donne :

$$b_1 = p(B_1) = p_{UB}(B_1) \times p(UB) + p_{UR}(B_1) \times p(UV) + p_{UV}(B_1) \times p(UV)$$

Les urnes rouge et verte ne contenant pas de boule blanche, on a : $p_{UR}(B_1) = p_{UV}(B_1) = 0$

. Par ailleurs, l'urne blanche contient trois boules blanches et une boule rouge, toutes supposées indiscernables au toucher. On a donc : $p_{UB}(B_1) = \frac{3}{4}$.

Enfinement : $b_1 = p_{UB}(B_1) \times p(UB) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

En raisonnant de façon similaire :

$$\begin{aligned} r_1 &= p(R_1) = p_{UB}(R_1) \times p(UB) + p_{UR}(R_1) \times p(UV) + p_{UV}(R_1) \times p(UV) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= p(V_1) = p_{UB}(V_1) \times p(UB) + p_{UR}(V_1) \times p(UV) + p_{UV}(V_1) \times p(UV) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On a donc : $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

A titre de vérification (partielle), on notera que l'on a : $b_1 + r_1 + v_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = 1$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b. Dans cette question, nous raisonnons comme précédemment mais cette fois, les événements considérés qui partitionnent l'univers sont les événements B_n , R_n et V_n .

On a alors :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= p(\mathbf{B}_{n+1}) = p_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{B}_{n+1}) \times p(\mathbf{B}_n) + p_{\mathbf{R}_n}(\mathbf{B}_{n+1}) \times p(\mathbf{R}_n) + p_{\mathbf{V}_n}(\mathbf{B}_{n+1}) \times p(\mathbf{V}_n) \\ &= \frac{3}{4} \times b_n + 0 \times r_n + 0 \times v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p(\mathbf{R}_{n+1}) = p_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{R}_{n+1}) \times p(\mathbf{B}_n) + p_{\mathbf{R}_n}(\mathbf{R}_{n+1}) \times p(\mathbf{R}_n) + p_{\mathbf{V}_n}(\mathbf{R}_{n+1}) \times p(\mathbf{V}_n) \\ &= \frac{1}{4} \times b_n + \frac{2}{3} \times r_n + \frac{1}{3} \times v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p(\mathbf{V}_{n+1}) = p_{\mathbf{B}_n}(\mathbf{V}_{n+1}) \times p(\mathbf{B}_n) + p_{\mathbf{R}_n}(\mathbf{V}_{n+1}) \times p(\mathbf{R}_n) + p_{\mathbf{V}_n}(\mathbf{V}_{n+1}) \times p(\mathbf{V}_n) \\ &= 0 \times b_n + \frac{1}{3} \times r_n + \frac{2}{3} \times v_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{3}{4} \times b_n + 0 \times r_n + 0 \times v_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4} \times b_n + \frac{2}{3} \times r_n + \frac{1}{3} \times v_n \\ v_{n+1} = 0 \times b_n + \frac{1}{3} \times r_n + \frac{2}{3} \times v_n \end{cases}$$

Soit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ r_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$X_{n+1} = A \times X_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2. On cherche ici $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $A \times X = X$ et $x + y + z = 1$.

On va donc résoudre : $\begin{cases} A \times X = X \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \times X = X \\ x + y + z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}x \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ z = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y = 2y + z \\ 3z = y + 2z \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $A \times X = X$ et $x + y + z = 1$ est la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. a. De la relation (cf. question 1.b.) $X_{n+1} = A \times X_n$ valable pour tout entier naturel n non nul, on tire classiquement (récurrence immédiate) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = A^{n-1} \times X_1$$

Etudier le comportement asymptotique de la suite (X_n) (c'est-à-dire déterminer la limite éventuelle de la suite (X_n)) revient donc à étudier celui de la suite (A^n) des puissances de la matrice A .

On nous donne, dans l'énoncé, l'expression générale de A^n en fonction de n .

Comme $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ et $\frac{3}{4} \in]-1; 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (A^{n-1} X_1) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{n-1} \right) \times X_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) \\ 0,5 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) \\ 0,5 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \times 1 \\ 0,5 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On retrouve la matrice colonne obtenue à la question 2.

Quand on effectue un grand nombre de tirage (n grand) les probabilités d'obtenir respectivement une boule blanche, rouge et verte vont devenir proches de 0, 0,5 et 0,5. C'est l'état stable du système (remarque : un tel état peut ne pas exister !).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = X$$

b. D'après la question précédente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ (premier coefficient de X).

Ainsi, pour un grand nombre n de tirages, la probabilité d'obtenir une boule blanche au n -ième tirage est pratiquement nulle. On dira qu'il est « presque sûrement » (c'est la terminologie technique ! ☺) impossible de tirer une boule blanche au n -ième tirage. On pouvait prévoir ce résultat. En effet, dès que l'on doit tirer une boule dans une des deux urnes rouge ou verte, il n'est plus possible de tirer une boule blanche. Ainsi, la seule possibilité pour obtenir une boule blanche est de tirer une boule dans l'urne blanche. Or, même si celle-ci comporte trois boules blanches et que l'on suppose que l'on choisit la première boule dans cette urne, on finira (éventuellement après un très grand nombre de tirages !) par obtenir la quatrième boule qui est rouge. On ne pourra plus, à partir de là, obtenir une autre boule blanche ...

N°76 page 535

1. a. Pour tout entier naturel n , on a, en tenant compte de la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) :

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times u_n + 1 \times u_{n+1} \\ -2 \times u_n + 3 \times u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A \times U_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- b. Résultat classique obtenu par une récurrence immédiate que nous ne détaillons pas.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n \times U_0$$

2. a. On obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- b. Posons $D = P^{-1} \times A \times P$ qui est une matrice diagonale.

On a classiquement, pour tout entier naturel n : $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Par ailleurs : $D = P^{-1} \times A \times P \Leftrightarrow A = P \times D \times P^{-1}$ et on a classiquement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

$$\text{Soit : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a bien, finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

3. D'après la question 1.b., on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n \times U_0$.

En tenant compte du résultat de la question précédente et de $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, il vient, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_n = A^n \times U_0 &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \times (2-2^n) + u_1 \times (2^n-1) \\ u_0 \times (2-2^{n+1}) + u_1 \times (2^{n+1}-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_0 - u_1 - 2^n \times (u_0 - u_1) \\ 2u_0 - u_1 - 2^{n+1} \times (u_0 - u_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalelement :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2u_0 - u_1 - 2^n \times (u_0 - u_1)$

4. Comme $2 > 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. Ainsi, la seule possibilité pour que la limite de $2^n \times (u_0 - u_1)$, et donc celle de u_n , ne soit pas infinie (positivement ou négativement selon le signe de $u_0 - u_1$) est que la différence $u_0 - u_1$ soit nulle.

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2u_0 - u_1 - 2^n \times (u_0 - u_1) = 2u_0 - u_0 - 2^n \times (u_0 - u_0) = u_0$.

La suite (u_n) est alors constante et admet, de fait, pour limite u_0 .

Pour $u_1 = u_0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

N°92 page 542

1. On mène ici classiquement un raisonnement par récurrence.
On note m l'ordre des matrices M et N .

Initialisation.

Pour $n=0$, on a : $(M+N)^n = (M+N)^0 = I_m$.

Par ailleurs : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} M^{0-k} N^k = \binom{0}{0} M^{0-0} N^0 = 1 \times I_m \times I_m = I_m$.

L'égalité est bien vérifiée. La propriété est initialisée.

Hérédité.

Soit n un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que l'on a : $(M+N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k$.

On s'intéresse à $(M + N)^{n+1}$.

On a :

$$\begin{aligned}
 (M + N)^{n+1} &= (M + N) \times (M + N)^n \\
 &= (M + N) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
 &= M \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k + N \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n+1-k} N^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^{k+1} && \text{(M et N commutent)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n+1-k} N^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{(n+1)-(k+1)} N^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n+1-k} N^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} M^{(n+1)-k} N^k && \text{(réindexation de la deuxième somme)} \\
 &= \binom{n}{0} M^{n+1-0} N^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} M^{n+1-k} N^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} M^{(n+1)-k} N^k + \binom{n}{n+1-1} M^{(n+1)-(n+1)} N^{n+1} \\
 &= \binom{n}{0} M^{n+1-0} N^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] M^{n+1-k} N^k + \binom{n}{n} M^{(n+1)-(n+1)} N^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} M^{n+1-0} N^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} M^{n+1-k} N^k + \binom{n+1}{n+1} M^{(n+1)-(n+1)} N^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} M^{n+1-k} N^k
 \end{aligned}$$

L'égalité est ainsi valable au rang $n+1$. La propriété est héréditaire.

Conclusion.

L'égalité est valable pour tout entier naturel n .

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (M + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k$$

2. a. On a immédiatement :

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors facilement : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis : $B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$B^n = B^{n-3} \times B^3 = B^{n-3} \times O_3 = O_3$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $B^n = O_3$.

c. Les matrices B et I_3 commutent puisque la matrice I_3 commute avec n'importe quelle matrice carrée d'ordre 3.

D'après la question 1, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3 B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, il vient, pour tout entier naturel n :

$$(I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 = 1 \times I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (I_3 + B)^n = I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

d. Comme $I_3 + B = A$, le résultat de la question précédente se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

En tenant compte de $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
 A^n &= I_3 + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2 \\
 &= I_3 + n \times B + \frac{n(n-1)}{2} \times B^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, avec $n=8$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & \frac{8(8+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, résultat que l'on pourra

vérifier à la calculatrice.