On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

Dans la division euclidienne par 3, un entier peut admettre comme reste : 0, 1 ou 2.
Si ce reste est 0, alors l'entier est de la forme $3k$ et il admet 3 comme diviseur.
Le nombre premier p étant supérieur ou égal à 7, il est différent de 3. Comme il est premier, il ne peut donc admettre 3 comme diviseur. Ainsi, le reste de la division euclidienne de p par 3 est 1 ou 2.
Si ce reste vaut 1, on a $p = 3k + 1$ et il vient $p \equiv 1\left(3\right)$. Si ce reste vaut 2, il vient $p \equiv 2\left(3\right)$ et donc $p \equiv -1\left(3\right)$.
Finalement :

L'entier p est congru à 1 ou à -1 modulo 3.

Si $p \equiv 1\left(3\right)$ alors $p^4 \equiv 1^4\left(3\right)$, soit $p^4 \equiv 1\left(3\right)$ et, finalement : $p^4 - 1 \equiv 0\left(3\right)$.
Si $p \equiv -1\left(3\right)$ alors $p^4 \equiv \left(-1\right)^4\left(3\right)$, soit $p^4 \equiv 1\left(3\right)$ et, finalement : $p^4 - 1 \equiv 0\left(3\right)$.

Dans tous les cas, on a : $p^4 - 1 \equiv 0\left(3\right)$ et donc n est divisible par 3.

n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k\left(k+1\right)$, puis que n est divisible par 16.

L'entier p est premier supérieur ou égal à 7, il est donc impair, 2 étant le seul entier naturel premier pair.
Il existe donc un entier naturel k supérieur ou égal à 3 tel que $n = 2k + 1$.
Il vient alors : $p^2 = \left(2k+1\right)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ et donc : $p^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\left(k+1\right)$.
Par ailleurs : $p^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2\left(2k^2 + 2k + 1\right)$.
On a alors :

$$n = p^4 - 1 = \left(p^2 - 1\right)\left(p^2 + 1\right) = 4k\left(k+1\right) \times 2\left(2k^2 + 2k + 1\right) = 8k\left(k+1\right)\left(2k^2 + 2k + 1\right)$$

Or le produit $k\left(k+1\right)$ est le produit de deux entiers consécutifs. L'un d'eux est pair et il en va donc de même pour le produit. Ainsi, $8k\left(k+1\right)$ est un multiple de 16 et il en va de même pour $n = p^4 - 1$.

n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de *p* par 5, démontrer que 5 divise *n*.

Dans la division euclidienne de *p* par 5, les restes possibles sont 1, 2, 3 et 4 (Nous excluons 0 puisque 5 ne divise pas un entier premier supérieur ou égal à 7).
Si le reste vaut :

- $\boxed{1}$. On a $p \equiv 1\,(5)$ et donc $p^4 \equiv 1^4\,(5)$, soit $p^4 \equiv 1\,(5)$. Finalement $p^4 - 1 \equiv 0\,(5)$.
- $\boxed{2}$. On a $p \equiv 2\,(5)$ et donc $p^4 \equiv 2^4\,(5)$, soit $p^4 \equiv 16\,(5)$ d'où $p^4 \equiv 1\,(5)$.
  Finalement $p^4 - 1 \equiv 0\,(5)$.
- $\boxed{3}$. On a $p \equiv 3\,(5)$ et donc $p^4 \equiv 3^4\,(5)$, soit $p^4 \equiv 81\,(5)$ d'où $p^4 \equiv 1\,(5)$.
  Finalement $p^4 - 1 \equiv 0\,(5)$.
- $\boxed{4}$. On a $p \equiv 4\,(5)$ et donc $p^4 \equiv 4^4\,(5)$, soit $p^4 \equiv 256\,(5)$ d'où $p^4 \equiv 1\,(5)$.
  Finalement $p^4 - 1 \equiv 0\,(5)$.

Dans tous les cas, on a $p^4 - 1 \equiv 0\,(5)$ et on en déduit que 5 divise *n*.

n est divisible par 5.

4. Déduire de ce qui précède que 240 divise *n*.

D'après les résultats précédents, nous pouvons affirmer que les facteurs 2, 3 et 5 apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers de *n* avec des exposants au moins égaux à 4, 1 et 1 respectivement. On peut donc écrire la décomposition en facteurs premiers de *n* comme suit :

$$n = 2^{4+\alpha_1} \times 3^{1+\alpha_2} \times 5^{1+\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$$

Avec : $2 < 3 < 5 < p_4 < \ldots < p_m$ et pour tout *i* dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, α_i entier naturel (α_1, α_2 et α_3 éventuellement nuls).

Il vient alors :

$$\begin{aligned} n &= 2^{4+\alpha_1} \times 3^{1+\alpha_2} \times 5^{1+\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m} \\ &= 2^4 \times 3 \times 5 \times \left(2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}\right) \\ &= 240 \times \left(2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times p_4^{\alpha_4} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}\right) \end{aligned}$$

L'entier *n* est un multiple de 240.

n est divisible par 240.

5. Existe-t-il 15 nombres premiers $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $\mathrm{A} = p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Nous considérons $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ 15 nombres premiers supérieurs ou égaux à 7.
Pour pouvoir exploiter le résultat précédent, nous écrivons :

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{15}^4 \\ &= \left(p_1^4 - 1\right) + 1 + \left(p_2^4 - 1\right) + 1 + ... + \left(p_{15}^4 - 1\right) + 1 \\ &= \left(p_1^4 - 1\right) + \left(p_2^4 - 1\right) + ... + \left(p_{15}^4 - 1\right) + 15\end{aligned}$$

D'après le résultat obtenu à la question 4, nous pouvons écrire :

$$p_1^4 - 1 = 240q_1\ ,\ \ p_2^4 - 1 = 240q_2\ ,\ \ldots,\ \ p_{15}^4 - 1 = 240q_{15}$$

Où $q_1, q_2, \ldots, q_{15}$ sont des entiers naturels.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \left(p_1^4 - 1\right) + \left(p_2^4 - 1\right) + ... + \left(p_{15}^4 - 1\right) + 15 \\ &= 240q_1 + 240q_2 + ... + 240q_{15} + 15 \\ &= 15 \times 16 \times \left(q_1 + q_2 + ... + q_{15}\right) + 15 \\ &= 15 \times \left[16 \times \left(q_1 + q_2 + ... + q_{15}\right) + 1\right]\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ premiers supérieurs ou égaux à 7, le nombre A est un multiple de 15 et n'est donc pas premier.

Il n'existe pas 15 nombres premiers $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $\mathrm{A} = p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{15}^4$ soit un nombre premier.