Corrigé

Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 2, on appelle « diviseur propre de N », tout diviseur positif de N différent de N. On note alors $S(\mathrm{N})$ la somme des diviseurs propres de N (par exemple : $S(10)=1+2+5=8$).

On définit alors la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{N} \\ u_{n+1} = \begin{cases} S(u_n) & \text{si } u_n \neq 1 \\ 1 & \text{si } u_n = 1 \end{cases} \end{cases}$$

1. Déterminer la suite (u_n) pour $\mathrm{N}=12$.

Les diviseurs propres de 12 sont 1, 2, 3, 4 et 6.
On a donc : $u_1 = S(12) = 1+2+3+4+6 = 16$.

Les diviseurs propres de 16 sont 1, 2, 4 et 8. On a donc : $u_2 = S(16) = 1+2+4+8 = 15$.

Les diviseurs propres de 15 sont 1, 3 et 5. On a donc : $u_3 = S(15) = 1+3+5 = 9$.

Les diviseurs propres de 9 sont 1 et 3. On a donc : $u_4 = S(9) = 1+3 = 4$.

Les diviseurs propres de 4 sont 1 et 2. On a donc : $u_5 = S(4) = 1+2 = 3$.

Le seul diviseur propre de 3 est 1. On a donc : $u_6 = S(3) = 1$.

A partir de ce rang, la suite est constante et tous les termes prennent la valeur 1.

Finalement :

Avec $u_0 = 12$, on a : $u_1 = 16$, $u_2 = 15$, $u_3 = 9$, $u_4 = 4$, $u_5 = 3$
et pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 6 : $u_n = 1$

2. Déterminer la suite (u_n) pour un entier naturel p premier.

Tout entier naturel p admet un seul diviseur propre : 1.
Pour un tel entier, on a aura donc : $u_0 = p$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1$.

Pour tout entier naturel p : $u_0 = p$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1$.

3. Ecrire un algorithme donnant les k premiers termes ($k \geq 1$) de la suite (u_n) (les entiers N et k seront demandés à l'utilisateur).

Cf. l'algorithme relatif aux « chaînes amiables » sur le site www.panamaths.net dans la rubrique « Algorithmes ».

4. Utiliser votre programme avec $\mathrm{N} = 12\,496$ et différentes valeurs de k.
Que remarque-t-on ?

On obtient facilement :

$$u_0 = 12\,496,\ u_1 = 14\,288,\ u_2 = 15\,472,\ u_3 = 14\,536,\ u_4 = 14\,264, \text{ et } u_5 = 12\,496.$$

Ainsi :

La suite (u_n) est périodique.

Lorsqu'il existe un entier non nul n_0 tel que :

- pour tout entier naturel non nul strictement inférieur à n_0 on a $u_n \neq \mathrm{N}$.
- $u_{n_0} = \mathrm{N}$.

on dit que le « n_0 – uplet $(u_1, u_2, u_3, ..., u_{n_0})$ est une « *chaîne amiable* » d'ordre n_0.

5. Quel est la chaîne amiable associée à $\mathrm{N} = 12\,496$? Quel est son ordre ?

D'après la question précédente, il vient directement :

La chaîne amiable associée à $\mathrm{N} = 12\,496$ est :
$(14\,288, 15\,472, 14\,536, 14\,264, 12\,496)$
C'est une chaîne d'ordre 5.

Cette chaîne a été découverte en 1918 par le mathématicien français Paul POULET.

6. Quel est la chaîne amiable associée à $\mathrm{N} = 14\,316$? Quel est son ordre ?

Avec le programme Algobox, on obtient directement :

La chaîne amiable associée à $\mathrm{N} = 14\,316$ est :

$u_0 = 14\,316$, $u_1 = 19\,116$, $u_2 = 31\,704$, $u_3 = 47\,616$, $u_4 = 83\,328$, $u_5 = 177\,792$,
$u_6 = 295\,488$, $u_7 = 629\,072$, $u_8 = 589\,786$, $u_9 = 294\,896$, $u_{10} = 358\,336$, $u_{11} = 418\,904$
$u_{12} = 366\,556$, $u_{13} = 274\,924$, $u_{14} = 275\,444$, $u_{15} = 243\,760$, $u_{16} = 376\,736$, $u_{17} = 381\,028$
$u_{18} = 285\,778$, $u_{19} = 152\,990$, $u_{20} = 122\,410$, $u_{21} = 97\,946$, $u_{22} = 48\,976$, $u_{23} = 45\,946$
$u_{24} = 22\,976$, $u_{25} = 22\,744$, $u_{26} = 19\,916$, $u_{27} = 17\,716$, $\boxed{u_{28} = 14\,316}$.

C'est une chaîne d'ordre 28.

Pour conclure, notez que l'on ne sait pas à ce jour s'il existe des chaînes amiables d'ordre quelconque …

Alors ? Envie de gloire mathématique … ☺