A rendre le jeudi 7 novembre 2013

Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 2, on appelle « diviseur propre de N », tout diviseur positif de N différent de N. On note alors $S(\mathrm{N})$ la somme des diviseurs propres de N (par exemple : $S(10)=1+2+5=8$).

On définit alors la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{N} \\ u_{n+1} = \begin{cases} S(u_n) & \text{si } u_n \neq 1 \\ 1 & \text{si } u_n = 1 \end{cases} \end{cases}$$

1. Déterminer la suite (u_n) pour $\mathrm{N}=12$.
2. Déterminer la suite (u_n) pour un entier naturel *p* premier supérieur ou égal à 3.
3. Ecrire un algorithme donnant les *k* premiers termes ($k \geq 1$) de la suite (u_n) (les entiers N et *k* seront demandés à l'utilisateur).

   Ecrire un programme dans votre calculatrice correspondant à cet algorithme.
   Vous apporterez votre calculatrice le jeudi 7 novembre. Je vous demanderai alors d'exécuter le programme avec des valeurs de N et *k* que je vous fournirai.

4. Utiliser votre programme avec $\mathrm{N}=12\,496$ et différentes valeurs de *k*.
   Que remarque-t-on ?

Lorsqu'il existe un entier non nul n_0 tel que :

- pour tout entier naturel non nul strictement inférieur à n_0 on a $u_n \neq \mathrm{N}$.
- $u_{n_0} = \mathrm{N}$.

on dit que le « n_0 – uplet $(u_1, u_2, u_3, ..., u_{n_0})$ est une « *chaîne amiable* » d'ordre n_0.

5. Quel est la chaîne amiable associée à $\mathrm{N}=12\,496$? Quel est son ordre ?

Cette chaîne a été découverte en 1918 par le mathématicien français Paul POULET.

6. Quel est la chaîne amiable associée à $\mathrm{N}=14\,316$? Quel est son ordre ?

Pour conclure, notez que l'on ne sait pas à ce jour s'il existe des chaînes amiables d'ordre quelconque …