Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

Toutes calculatrices autorisées.

Exercice N°1 (3 points)

Question de cours : énoncer et démontrer la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence dans $\mathbb{Z}$.

Exercice N°2 (4 points)

```
Début Programme
    Lire N
    2 → D
    0 → ALPHA
    Tant que D divise N faire
        ALPHA +1 → ALPHA
        N/D → N
    Fin Tant que
    Si ALPHA > 0 alors
        Afficher « Diviseur 2 d'exposant : »
        Afficher ALPHA
    Fin Si
    3 → D
    Tant que N > 1 faire
        0 → ALPHA
        Tant que D divise N faire
            ALPHA +1 → ALPHA
            N/D → N
        Fin Tant que
        Si ALPHA > 0 alors
            Afficher « Diviseur »
            Afficher D
            Afficher «  d'exposant : »
            Afficher ALPHA
        Fin Si
        D + 2 → D
    Fin Tant
Fin Programme
```

Ci-contre, un algorithme élémentaire de détermination de la décomposition en facteurs premiers (chaque facteur premier et son exposant sont fournis au fur et à mesure) d'un entier (supposé supérieur ou égal à 2) initialement saisi par l'utilisateur.

1. Faites « tourner » l'algorithme pour $N = 495$ (on présentera dans un tableau les valeurs successivement prises par les variables N, D et ALPHA).
2. Comment modifier l'algorithme pour qu'il fournisse, en plus de la décomposition en facteurs premiers de l'entier fourni par l'utilisateur, le nombre total de diviseurs positifs de cet entier ?

Exercice N°3 (3 points)

On considère la somme :

$$A = 2001 + 2003 + 2005 + ... + 2099$$

1. Combien de termes la somme comporte-t-elle ?
2. Démontrer que A n'est pas premier (il va de soi que l'on ne calculera pas la valeur de A … ☺).

Exercice N°4 (4 points

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs. Par exemple : $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

Démontrer l'équivalence :

$$n \text{ premier } \Leftrightarrow S(n) = n + 1$$

Indication : pour $\boxed{\Leftarrow}$, on pourra mener un raisonnement par l'absurde.

Exercice N°5 (3 points)

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)^3 = n^2(n+3) + 3n + 1$.
2. Pour quelles valeurs de n, l'égalité précédente correspondrait-elle à une division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 dans laquelle le reste serait $3n+1$?

Exercice N°6 (3 points)

1. Vérifier que 20 022 002 et 12 341 234 sont divisibles par 137 et 73 (on donnera les quotients).
2. Généralisation : montrer que tout entier naturel de huit chiffres s'écrivant *ab cda bcd* (avec $a \neq 0$) est divisible par 137 et 73.

Fin du sujet.