

Exercice N°1

$7^2 = 49$ et $49 \equiv 10(13)$, d'autre part, $335 = 25 \times 13 + 10$ donc $335 \equiv 10(13)$

on en déduit: $49 \equiv 335(13)$ donc, pour tout entier naturel n , $49^n \equiv 335^n(13)$ donc $7^{2n} \equiv 335^n(13)$
donc $7^{2n} - 335^n \equiv 0(13)$, $7^{2n} - 335^n$ est toujours divisible par 13

Exercice N°2 $A = (n - 11)(n - 22)(n - 33)(n - 44)(n - 55)$

Raisonnons par disjonction des cas:

- si $n \equiv 0(5)$ alors $n - 55 \equiv -55(5)$ et $-55 \equiv 0(5)$ donc, par produit, $A \equiv 0(5)$
- si $n \equiv 1(5)$ alors $n - 11 \equiv -10(5)$ et $-10 \equiv 0(5)$ donc, par produit, $A \equiv 0(5)$
- si $n \equiv 2(5)$ alors $n - 22 \equiv -20(5)$ et $-20 \equiv 0(5)$ donc, par produit, $A \equiv 0(5)$
- si $n \equiv 3(5)$ alors $n - 33 \equiv -30(5)$ et $-30 \equiv 0(5)$ donc, par produit, $A \equiv 0(5)$
- si $n \equiv 4(5)$ alors $n - 44 \equiv -40(5)$ et $-40 \equiv 0(5)$ donc, par produit, $A \equiv 0(5)$

Pour tout n entier naturel, A est divisible par 5

Exercice N°3

$352 \equiv 2(5)$, pour tout entier naturel n , $352^n \equiv 2^n(5)$ d'autre part :

$2^1 \equiv 2(5)$; $2^2 \equiv 4(5)$; $2^3 \equiv 3(5)$; $2^4 \equiv 1(5)$, donc, pour tout entier naturel k ,

$2^{4k} \equiv 1^k(5)$ donc : $2^{4k} \equiv 1(5)$; $2^{4k+1} \equiv 2(5)$; $2^{4k+2} \equiv 4(5)$; $2^{4k+3} \equiv 3(5)$

on divise 14546 par 4 on a: $14546 = 3636 \times 4 + 2 = 4k + 2$ avec $k = 3636$

donc: $2^{14546} \equiv 4(5)$, finalement $352^{14546} \equiv 4(5)$, le reste recherché est 4

car: $0 \leq 4 < 5$

Exercice N°4

a) On présente le résultat sous forme de tableau

Reste de la division de x par 8	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste de la division de x^2 par 8	0	1	4	1	0	1	4	1

b) y^2 a les mêmes restes possibles dans la division euclidienne par 8 donc $x^2 + y^2$ peut être

congru modulo 8 à: $0 + 0$; $0 + 1$; $0 + 4$; $1 + 1$; $1 + 4$; $4 + 4$

les restes possibles sont donc: 0 ; 1 ; 4 ; 2 ; 5

c) on a : $8z^4 + 6 \equiv 6(8)$, le reste dans la division euclidienne par 8 de $8z^4 + 6$ est 6

l'équation n'a donc pas de solutions

Exercice N°5

a) $4^1 \equiv 4(9)$; $4^2 \equiv 7(9)$; $4^3 \equiv 1(9)$ donc, pour tout entier naturel k , $4^{3k} \equiv 1(9)$; $4^{3k+1} \equiv 4(9)$;

$4^{3k+2} \equiv 7(9)$, donc si $n = 3k$, $r = 1$, si $n = 3k + 1$, $r = 4$, si $n = 3k + 2$, $r = 7$

b) $A_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1 = 4^n(4n - n - 1) + 1 = (3n - 1)4^n + 1$

Raisonnons par disjonction des cas:

• si $n = 3k$, $3n - 1 = 9k - 1$ donc $3n - 1 \equiv -1(9)$ et $4^n \equiv 1(9)$ donc : $A_n \equiv -1 \times 1 + 1(9)$

$A_n \equiv 0(9)$

• si $n = 3k + 1$, $3n - 1 = 9k + 4$ donc $3n - 1 \equiv 2(9)$ et $4^n \equiv 4(9)$ donc : $A_n \equiv 2 \times 4 + 1(9)$

$A_n \equiv 9(9)$ donc $A_n \equiv 0(9)$

• si $n = 3k + 2$, $3n - 1 = 9k + 5$ donc $3n - 1 \equiv 5(9)$ et $4^n \equiv 7(9)$ donc : $A_n \equiv 5 \times 7 + 1(9)$

$A_n \equiv 36(9)$ donc $A_n \equiv 0(9)$

Finalement, A_n est toujours divisible par 9

Exercice N°6

1) les entiers a recherchés sont tels que : $a = 7q + r$, $0 \leq r < 7$ et $q = r$ donc:

$a = 8r$, $0 \leq r < 7$, donc $S = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48\}$

2) les entiers a recherchés sont tels que : $a = 90b + 11$, $b > 11$

or : $a < 960$ donc $960 > 90b + 11$ d'où: $b < \frac{960 - 11}{90}$ donc : $b \leq 10$, il est impossible d'avoir $b > 11$ et $b \leq 10$

il n'y a pas de solution