

**La calculatrice graphique est autorisée.**  
**Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.**  
**Le barème est fourni à titre indicatif.**

Une importance toute particulière doit être portée à la qualité de la rédaction,  
celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

## CORRIGE

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2 \times 10^n + 1$$

1. a. Calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  et  $c_3$ .

$$a_1 = 4 \times 10^1 - 1 = 40 - 1 = 39, b_1 = 2 \times 10^1 - 1 = 20 - 1 = 19 \text{ et } c_1 = 2 \times 10^1 + 1 = 20 + 1 = 21.$$

$$a_2 = 4 \times 10^2 - 1 = 400 - 1 = 399, b_2 = 2 \times 10^2 - 1 = 200 - 1 = 199 \text{ et}$$

$$c_2 = 2 \times 10^2 + 1 = 200 + 1 = 201$$

$$a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 4000 - 1 = 3999, b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 2000 - 1 = 1999 \text{ et}$$

$$c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2000 + 1 = 2001$$

$$a_1 = 39, b_1 = 19 \text{ et } c_1 = 21$$

$$a_2 = 399, b_2 = 199 \text{ et } c_2 = 201$$

$$a_3 = 3999, b_3 = 1999 \text{ et } c_3 = 2001$$

b. Combien les écritures décimales des nombres  $a_n$  et  $c_n$  ont-elles de chiffres ? Montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.

$$\text{On a : } a_0 = 4 \times 10^0 - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ et } c_0 = 2 \times 10^0 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ainsi, les écritures décimales de  $a_0$  et  $c_0$  comporte exactement un chiffre.

Pour  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , on part de l'écriture décimale de  $10^n$  qui correspond à un « 1 » suivi de  $n$  « 0 » :

$$10^n = \overbrace{100\dots 00}^{n \text{ "0"}}$$

Cette écriture comporte exactement  $n+1$  chiffres.

Il en va donc de même pour  $4 \times 10^n$  et  $2 \times 10^n$  :

$$4 \times 10^n = \overbrace{400\dots00}^{n \text{ "0"}}$$

$$\text{et } 2 \times 10^n = \overbrace{200\dots00}^{n \text{ "0"}}$$

On obtient enfin :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 = \overbrace{399\dots99}^{n \text{ "9"}}$$

qui comporte aussi  $n + 1$  chiffres

$$c_n = 2 \times 10^n + 1 = \overbrace{200\dots01}^{n-1 \text{ "0"}}$$

En définitive :

Pour tout entier naturel  $n$ , les écritures décimales de  $a_n$  et  $c_n$  comportent exactement  $n + 1$  chiffres.

Pour la divisibilité de  $a_n$  et  $c_n$  par 3, on pouvait procéder de diverses façons.

En utilisant l'écriture décimale

$$\text{On a : } a_n = 4 \times 10^n - 1 = \overbrace{399\dots99}^{n \text{ "9"}}$$

La somme des chiffres de  $a_n$  vaut donc :  $3 + 9n = 3(1 + 3n)$  qui est un multiple de 3. On en tire que  $a_n$  est également un multiple de 3.

$$\text{On a aussi : } c_n = 2 \times 10^n + 1 = \overbrace{200\dots01}^{n-1 \text{ "0"}}$$

La somme des chiffres de  $c_n$  vaut donc :  $2 + 1 = 3$  et on en déduit également que  $c_n$  est un multiple de 3.

En utilisant les congruences

On a  $10 = 3 \times 3 + 1$  et donc  $10 \equiv 1(3)$ . Il en découle, pour tout entier naturel  $n$  :  $10^n \equiv 1^n(3)$ , c'est-à-dire :  $10^n \equiv 1(3)$ .

Il vient alors :  $4 \times 10^n \equiv 4 \times 1(3) \equiv 1(3)$ , d'où :  $4 \times 10^n - 1 \equiv 0(3)$ , soit  $3 | a_n$ .

Et :  $2 \times 10^n \equiv 2 \times 1(3) \equiv 2(3)$ , d'où :  $2 \times 10^n + 1 \equiv 2 + 1(3) \equiv 0(3)$ , soit  $3 | c_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que  $b_3$  est premier.

On va ici utiliser le fait qu'un entier  $n$  supérieur ou égal à 2 est premier si, et seulement si, il n'admet pas de diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ .

Avec  $n = b_3 = 1999$ , on a :  $\sqrt{n} = \sqrt{1999} \approx 44,7$ . D'après la liste fournie, le plus grand entier premier inférieur à  $\sqrt{1999}$  est donc 43.

On va donc tester si 1999 est divisible par l'un des entiers premiers de la liste inférieurs ou égaux à 43.

1999 est impair donc non divisible par 2.

$1+9+9+9 = 28$  qui n'est pas divisible par 3. Donc 1999 n'est pas divisible par 3.

Le chiffre des unités de 1999 ne vaut ni 0 ni 5. 1999 n'est donc pas divisible par 5.

Pour les autres diviseurs potentiels, nous pouvons, à l'aide de la calculatrice, donner les divisions euclidiennes :

$$\begin{array}{lll} 1999 = 285 \times 7 + 4 & 1999 = 181 \times 11 + 8 & 1999 = 153 \times 13 + 10 \\ 1999 = 117 \times 17 + 10 & 1999 = 105 \times 19 + 4 & 1999 = 86 \times 23 + 21 \\ 1999 = 68 \times 29 + 27 & 1999 = 64 \times 31 + 15 & 1999 = 54 \times 37 + 1 \\ 1999 = 48 \times 41 + 31 & 1999 = 46 \times 43 + 21 & \end{array}$$

Aucun des restes ci-dessus n'est nul.

$$b_3 = 1999 \text{ est premier.}$$

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n \times c_n = a_{2n}$ .  
En déduire la décomposition en facteurs premiers de  $a_6$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} b_n \times c_n &= (2 \times 10^n - 1) \times (2 \times 10^n + 1) \\ &= (2 \times 10^n)^2 - 1^2 \\ &= 4 \times 10^{2n} - 1 \\ &= a_{2n} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \times c_n = a_{2n}$$

Avec  $n = 3$ , il vient alors :  $a_6 = b_3 \times c_3$ .

A la question c, on a montré que  $b_3 = 1999$  était premier.

A la question b, on a montré que les  $c_n$  était divisible par 3. C'est donc le cas pour  $c_3$  et on a facilement :  $c_3 = 2001 = 3 \times 667$  puis  $c_3 = 2001 = 3 \times 667 = 3 \times 23 \times 29$ , 23 et 29 étant premiers.

Finalement :

$$a_6 = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001 = 3 \times 23 \times 29 \times 1999$$

e. Montrer que  $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$ . En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux.

Notons, dans un premier temps, que l'on a :  $c_n = b_n + 2$ .

Posons  $D = \text{PGCD}(b_n, c_n)$  et  $D' = \text{PGCD}(c_n, 2)$ .

On a :

$$\begin{cases} D | b_n \\ D | c_n \end{cases} \Rightarrow D | (c_n - b_n) \Leftrightarrow D | 2$$

Ainsi,  $D | c_n$  et  $D | 2$ . D'où :  $D | \text{PGCD}(c_n, 2)$ , c'est-à-dire :  $D | D'$ .

Par ailleurs :

$$\begin{cases} D' | c_n \\ D' | 2 \end{cases} \Rightarrow D' | (c_n - 2) \Leftrightarrow D' | b_n$$

Ainsi,  $D' | b_n$  et  $D' | c_n$ . D'où :  $D' | \text{PGCD}(b_n, c_n)$ , c'est-à-dire :  $D' | D$ .

Comme  $D | D'$  et  $D' | D$ , alors  $D = D'$ . Le résultat est établi.

$$\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$$

L'entier  $c_n$  étant impair, il est premier avec 2 :  $\text{PGCD}(c_n, 2) = 1$ .

D'après le résultat obtenu précédemment, on a donc :  $\text{PGCD}(b_n, c_n) = 1$  et les entiers  $b_n$  et  $c_n$  sont bien premiers entre eux.

Les entiers  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1) \quad b_3x + c_3y = 1$$

d'inconnues les entiers relatifs  $x$  et  $y$ .

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

A la question 1.e., on a vu que les entiers  $b_n$  et  $c_n$  étaient premiers. C'est en particulier le cas pour les entiers  $b_3$  et  $c_3$ . D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $ub_3 + vc_3 = 1$ . L'équation (1) possède bien au moins une solution.

L'équation (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres  $c_3$  et  $b_3$  ; en déduire une solution particulière de (1).

On a facilement :

$$2001 = 1999 \times 1 + 2$$

$$1999 = 2 \times 999 + \boxed{1}$$

En « remontant » l'algorithme, il vient alors :

$$1 = 1999 - 2 \times 999 = 1999 - 999 \times (2001 - 1999) = 1000 \times 1999 + (-999) \times 2001$$

Le couple  $(1000 ; -999)$  est ainsi un couple solution de l'équation (1).

c. Résoudre l'équation (1).

On a classiquement :

$$b_3x + c_3y = 1$$

$$\Leftrightarrow 1999x + 2001y = 1$$

$$\Leftrightarrow 1999x + 2001y = 1999 \times 1000 + 2001 \times (-999)$$

$$\Leftrightarrow 1999 \times (x - 1000) = 2001 \times (-999 - y)$$

2001 divise donc le produit  $1999 \times (x - 1000)$ . Mais comme 2001 et 1999 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que 2001 divise  $x - 1000$ . Il existe donc un entier  $k$  tel que :  $x - 1000 = 2001 \times k$ , soit  $x = 1000 + 2001 \times k$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} b_3x + c_3y &= 1 \\ \Leftrightarrow 1999 \times (x - 1000) &= 2001 \times (-999 - y) \\ \boxed{\Rightarrow} 1999 \times 2001 \times k &= 2001 \times (-999 - y) \\ \Leftrightarrow 1999 \times k &= -999 - y \\ \Leftrightarrow y &= -999 - 1999k \end{aligned}$$

On vient ainsi de montrer que **si** le couple  $(x; y)$  est solution de l'équation (1), **alors** il existe un entier  $k$  tel que :  $(x; y) = (1000 + 2001 \times k; -999 - 1999k)$ .

Réciproquement, soit maintenant un couple  $(x; y)$  tel qu'il existe un entier  $k$  avec :  $(x; y) = (1000 + 2001 \times k; -999 - 1999k)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} 1999x + 2001y &= 1999 \times (1000 + 2001 \times k) + 2001 \times (-999 - 1999k) \\ &= 1999 \times 1000 + \cancel{1999 \times 2001 \times k} - 2001 \times 999 - \cancel{2001 \times 1999 \times k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Un tel couple est bien solution de l'équation (1).

Finalement :

L'équation  $1999x + 2001y = 1$  admet pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(1000 + 2001 \times k; -999 - 1999k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.