La calculatrice graphique est autorisée.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Une importance toute particulière doit être portée à la qualité de la rédaction,
celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

Pour tout entier naturel n, on considère les nombres :

$$a_n = 4\times 10^n - 1,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1$$

1. a. Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ *et* c_3.

   b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

   c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

   En déduire la décomposition en facteurs premiers de a_6.

   e. Montrer que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

   $$(1) \qquad b_3 x + c_3 y = 1$$

   d'inconnues les entiers relatifs x et y.

   a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

   c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.