

**La calculatrice graphique est autorisée.**

Une importance toute particulière doit être portée à la qualité de la rédaction,  
celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

**CORRIGE**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels quelconques. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $A$  s'exprime en fonction de  $I$ ,  $J$ ,  $a$  et  $b$ .

On a :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ b & 0 & b \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

$$A = aI + bJ$$

2. a. Calculer  $J^2$ .

On obtient facilement :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2J$$

$$J^2 = 2J$$

b. Calculer, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $J^n$ .

On a :  $J^1 = 1J = 2^0 J$ . D'après la question précédente :  $J^2 = 2J$ .

On en tire d'ailleurs :  $J^3 = J^2 \times J = (2J) \times J = 2J^2 = 2 \times (2J) = 4J = 2^2 J$ .

On peut conjecturer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1} J$ .

Etablissons ce résultat par récurrence en considérant, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\mathcal{P}_n : \ll J^n = 2^{n-1} J \gg$$

#### Initialisation

Pour  $n = 1$ , on a :  $J^n = J^1 = 1J = 2^0 J = 2^{1-1} J$ .

La propriété  $\mathcal{P}_1$  est donc vraie.

#### Hérédité

Soit  $n$  un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie, c'est-à-dire :  $J^n = 2^{n-1} J$ .

On a alors :  $J^{n+1} = J^n \times J = (2^{n-1} J) \times J = 2^{n-1} J^2 = 2^{n-1} \times 2J = 2^n J = 2^{(n+1)-1} J$ .

Ainsi, la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc héréditaire.

#### Conclusion

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est initialisée (à  $n = 1$ ) et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1} J$$

3. a. Calculer  $A^2$ .

On peut bien sûr poser le calcul et calculer les coefficients de  $A^2$  un par un ... mais on a nettement plus intérêt à utiliser les résultats des questions 1 et 2.a et à tenir compte du fait que les matrices  $I$  et  $J$  commutent :

$$A^2 = (aI + bJ)^2 = a^2 I^2 + 2abIJ + b^2 J^2 = a^2 I + 2abJ + b^2 \times (2J) = a^2 I + 2b(a+b)J$$

$$A^2 = a^2 I + 2b(a+b)J$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$A^n = a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J$$

Nous menons, ici encore, un raisonnement par récurrence.

Nous considérons cette fois, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\mathcal{P}_n : \ll A^n = a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J \gg$$

Initialisation

Pour  $n = 1$ , on a :  $A^1 = A^1 = A = aI + bJ$  et, par ailleurs :

$$a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J = aI + \frac{(a+2b)^1 - a^1}{2} J = aI + bJ$$

La propriété  $\mathcal{P}_1$  est donc vraie.

Hérédité

Soit  $n$  un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie, c'est-à-dire :  $A^n = a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = \left( a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J \right) \times (aI + bJ) \\ &= a^n I \times aI + a^n I \times bJ + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J \times aI + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J \times bJ \\ &= a^{n+1} I + a^n bJ + a \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J + b \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J^2 \\ &= a^{n+1} I + a^n bJ + a \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J + b \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} \times 2J \\ &= a^{n+1} I + \left( a^n b + a \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} + 2b \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} \right) J \\ &= a^{n+1} I + \frac{\cancel{2a^n b} + a(a+2b)^n - a^{n+1} + 2b(a+2b)^n - \cancel{2ba^n}}{2} J \\ &= a^{n+1} I + \frac{(a+2b)(a+2b)^n - a^{n+1}}{2} J \\ &= a^{n+1} I + \frac{(a+2b)^{n+1} - a^{n+1}}{2} J \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est initialisée (à  $n = 1$ ) et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J$$

4. On pose  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a. On pose, dans cette question :  $a = 0$ .

Supposons que la matrice  $A$  soit inversible.

Calculer  $C.(A.A^{-1})$  et  $(C.A).A^{-1}$ .

En déduire par un raisonnement par l'absurde que, lorsque  $a = 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Comme  $a = 0$ , on a ici :  $A = bJ$ .

Si on suppose  $A$  inversible, on a immédiatement :  $A.A^{-1} = I$  et donc

$$C.(A.A^{-1}) = C.I = C.$$

Par ailleurs, on obtient facilement :  $C.A = C.(bJ) = b(C.J) = b \times O = O$ .

D'où :  $(C.A).A^{-1} = O$ .

Comme  $C \neq O$ , on a donc :  $C.(A.A^{-1}) \neq (C.A).A^{-1}$ , ce qui est absurde puisque le produit matriciel est associatif (on devrait avoir  $C.(A.A^{-1}) = (C.A).A^{-1}$  !).

On en déduit ainsi que la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Pour  $a = 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

b. On suppose, dans cette question :  $a + 2b = 0$ .

Supposons que la matrice  $A$  soit inversible.

Calculer  $J.(A.A^{-1})$  et  $(J.A).A^{-1}$ .

En déduire comme dans la question précédente que, lorsque  $a + 2b = 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Si on suppose  $A$  inversible, on a immédiatement :  $A.A^{-1} = I$  et donc

$$J.(A.A^{-1}) = J.I = J.$$

Par ailleurs, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on calcule facilement, en tenant compte de  $a + 2b = 0$  :

$$J.A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & a+2b \\ a+2b & 0 & a+2b \\ a+2b & 0 & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

D'où :  $(J.A).A^{-1} = O$ .

Comme  $J \neq O$ , on a donc :  $J.(A.A^{-1}) \neq (J.A).A^{-1}$ , ce qui est absurde puisque le produit matriciel est associatif (on devrait avoir  $J.(A.A^{-1}) = (J.A).A^{-1}$  !).

On en déduit ainsi que la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Pour  $a + 2b = 0$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

c. On suppose  $a \neq 0$  et  $a + 2b \neq 0$  et on pose  $B = \frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+2b)}J$ .

Montrer que  $B$  est l'inverse de  $A$ .

On a :

$$\begin{aligned} A.B &= (aI + bJ) \cdot \left( \frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+2b)}J \right) \\ &= aI \cdot \frac{1}{a}I - aI \cdot \frac{b}{a(a+2b)}J + bJ \cdot \frac{1}{a}I - bJ \cdot \frac{b}{a(a+2b)}J \\ &= I - \frac{b}{a+2b}J + \frac{b}{a}J - \frac{b^2}{a(a+2b)}J^2 \\ &= I - \frac{ab}{a(a+2b)}J + \frac{b(a+2b)}{a(a+2b)}J - \frac{b^2}{a(a+2b)}2J \\ &= I + \frac{-ab + b(a+2b) - 2b^2}{a(a+2b)}J \\ &= I + \frac{\cancel{-ab} + \cancel{ba} + 2b^2 - 2b^2}{a(a+2b)}J \\ &= I \end{aligned}$$

Comme  $A.B = I$ , on peut directement conclure que la matrice  $B$  est l'inverse de la matrice  $A$ .

La matrice  $B = \frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+2b)}J$  est l'inverse de la matrice  $A = aI + bJ$ .

Remarque : avec  $n = -1$ , l'expression  $a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2}J$  de la question 3.b donne :

$$\begin{aligned} a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2}J &= a^{-1}I + \frac{(a+2b)^{-1} - a^{-1}}{2}J \\ &= \frac{1}{a}I + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a} \right) J \\ &= \frac{1}{a}I + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a(a+2b)} - \frac{a+2b}{a(a+2b)} \right) J \\ &= \frac{1}{a}I - \frac{b}{a(a+2b)}J \end{aligned}$$

On retrouve la matrice  $B = A^{-1}$  de la question 4.c.