La calculatrice graphique est autorisée.

Une importance toute particulière doit être portée à la qualité de la rédaction,
celle-ci comptant pour une part significative dans la notation.

Soient a et b deux réels quelconques. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a+b \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour tous réels a et b, A s'exprime en fonction de I, J, a et b.

2. a. Calculer J^2.

   b. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, J^n.

3. a. Calculer A^2.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n = a^n I + \frac{(a+2b)^n - a^n}{2} J$$

4. On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. On pose, dans cette question : $a = 0$.
   Supposons que la matrice A soit inversible.
   Calculer $C\left(A.A^{-1}\right)$ et $(C.A).A^{-1}$.

   En déduire par un raisonnement par l'absurde que, lorsque $a = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

   b. On suppose, dans cette question : $a + 2b = 0$.
   Supposons que la matrice A soit inversible.
   Calculer $J\left(A.A^{-1}\right)$ et $(J.A).A^{-1}$.

   En déduire comme dans la question précédente que, lorsque $a + 2b = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

   c. On suppose $a \neq 0$ et $a + 2b \neq 0$ et on pose $B = \frac{1}{a} I - \frac{b}{a(a+2b)} J$.

   Montrer que B est l'inverse de A.