

**Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.
La calculatrice graphique est autorisée**

CORRIGE

Exercice N°1

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

1. Montrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel n non nul : $N^n = N$ et $R^n = R$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : \mathcal{P}_n : « $N^n = N$ ».

Initialisation.

Pour $n=1$, on a immédiatement : $N^n = N^1 = N$.

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé. On suppose \mathcal{P}_n vraie, c'est-à-dire $N^n = N$.

On a alors :

$$\begin{aligned} N^{n+1} &= N \times N^n \\ &= N \times N && \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= N^2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \times \frac{8}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \times \frac{8}{11} + \frac{8}{11} \times \frac{8}{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \times \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11} \right) & \frac{8}{11} \times \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11} \right) \\ \frac{3}{11} \times \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11} \right) & \frac{8}{11} \times \left(\frac{3}{11} + \frac{8}{11} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} \\ &= N \end{aligned}$$

Finalement, on a : $N^{n+1} = N^2 = N$.

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion.

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, N^n = N$$

De façon analogue, on montre que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = M$$

2. Montrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel n non nul : $M^n = N + \frac{1}{12^n} R$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : \mathcal{P}_n : « $M^n = N + \frac{1}{12^n} R$ ».

Initialisation.

Pour $n=1$, on a :

$$\begin{aligned} N + \frac{1}{12^n} R &= N + \frac{1}{12} R \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} + \frac{1}{12} \times \frac{8}{11} & \frac{8}{11} - \frac{1}{12} \times \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{1}{12} \times \frac{3}{11} & \frac{8}{11} + \frac{1}{12} \times \frac{3}{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \times \frac{1}{12} \times (3 \times 12 + 8) & \frac{8}{11} \times \frac{1}{12} \times (12 - 1) \\ \frac{3}{11} \times \frac{1}{12} \times (12 - 1) & \frac{1}{11} \times \frac{1}{12} \times (8 \times 12 + 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{11 \times 12} & \frac{8 \times 11}{11 \times 12} \\ \frac{3 \times 11}{11 \times 12} & \frac{99}{11 \times 12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{44}{11 \times 12} & \frac{8 \times 11}{11 \times 12} \\ \frac{3 \times 11}{11 \times 12} & \frac{99}{11 \times 12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{12} & \frac{8}{12} \\ \frac{3}{12} & \frac{9}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé. On suppose \mathcal{P}_n vraie, soit $M^n = N + \frac{1}{12^n} R$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M \times \left(N + \frac{1}{12^n} R \right) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= M \times N + \frac{1}{12^n} M \times R \quad (\text{distributivité}) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} M \times N &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \times \frac{8}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{11} \\ \frac{1}{4} \times \frac{3}{11} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{11} & \frac{1}{4} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{4} \times \frac{8}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} = N \\ M \times R &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times \frac{8}{11} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{11} & -\frac{1}{3} \times \frac{8}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{11} \\ \frac{1}{4} \times \frac{8}{11} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{11} & -\frac{1}{4} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3 \times 11} & -\frac{2}{3 \times 11} \\ -\frac{1}{4 \times 11} & \frac{1}{4 \times 11} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} R \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$M^{n+1} = M \times N + \frac{1}{12^n} M \times R = N + \frac{1}{12^n} \times \frac{1}{12} R = N + \frac{1}{12^{n+1}} R$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion.

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = N + \frac{1}{12^n} R$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$.

Comme $\frac{1}{12} \in]-1; 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12} \right)^n = 0$.

On en déduit ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12^n} R = O_2$ et enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(N + \frac{1}{12^n} R \right) = N + O_2 = N$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = N$$

Exercice N°2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A la main ou à l'aide de la calculatrice, donner les matrices M^2 , M^3 et M^4 .

On obtient facilement :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $M^{4n} = (-4)^n I_2$.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{4n} = (M^4)^n = (-4I_2)^n = (-4)^n (I_2)^n = (-4)^n I_2$$

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^{4n} = (-4)^n I_2$$

3. Pour tout entier naturel n , exprimer, en justifiant (un raisonnement par récurrence est inutile), M^n en fonction de q et I_2 , M , M^2 ou M^3 , où q est le quotient dans la division euclidienne de n par 4.
(on distinguera plusieurs cas suivant le reste de la division euclidienne de n par 4)

Comme suggéré, on note q le quotient de la division euclidienne de n par 4.
Dans cette division, le reste r peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

En utilisant les résultats des questions précédentes, il vient :

Si $r = 0$, on a :

$$M^n = M^{4q} = (-4)^q I_2 = \begin{pmatrix} (-4)^q & 0 \\ 0 & (-4)^q \end{pmatrix}.$$

Si $r = 1$, on a :

$$M^n = M^{4q+1} = M^{4q} \times M = (-4)^q I_2 \times M = (-4)^q M = \begin{pmatrix} (-4)^q & (-4)^q \\ -(-4)^q & (-4)^q \end{pmatrix}.$$

Si $r = 2$, on a :

$$M^n = M^{4q+2} = M^{4q} \times M^2 = (-4)^q I_2 \times M^2 = (-4)^q M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2(-4)^q \\ -2(-4)^q & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $r = 3$, on a :

$$M^n = M^{4q+3} = M^{4q} \times M^3 = (-4)^q I_2 \times M^3 = (-4)^q M^3 = \begin{pmatrix} -2(-4)^q & 2(-4)^q \\ -2(-4)^q & -2(-4)^q \end{pmatrix}.$$

Finalement :

Pour tout entier naturel q :

$$\begin{aligned} M^{4q} &= (-4)^q I_2 = \begin{pmatrix} (-4)^q & 0 \\ 0 & (-4)^q \end{pmatrix} \\ M^{4q+1} &= (-4)^q M = \begin{pmatrix} (-4)^q & (-4)^q \\ -(-4)^q & (-4)^q \end{pmatrix} \\ M^{4q+2} &= (-4)^q M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2(-4)^q \\ -2(-4)^q & 0 \end{pmatrix} \\ M^{4q+3} &= (-4)^q M^3 = \begin{pmatrix} -2(-4)^q & 2(-4)^q \\ -2(-4)^q & -2(-4)^q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice N°3

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels x et y tels que $C^2 = xC + yI_2$.

On obtient facilement : $C^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, pour tous réels x et y : $xC + yI_2 = x \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y & x \\ -9x & 4x+y \end{pmatrix}$

On a donc :

$$C^2 = xC + yI_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y & x \\ -9x & 4x+y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -2x+y \\ 2 = x \\ -18 = -9x \\ 7 = 4x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ -5 = -4+y \\ 7 = 8+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Finalement :

$$C^2 = 2C - I_2$$

2. En utilisant cette relation, exprimer C^3 en fonction de C et de I_2 .

On a :

$$C^3 = C^2 \times C = (2C - I_2) \times C = 2C^2 - I_2 \times C = 2C^2 - C = 2(2C - I_2) - C = 4C - 2I_2 - C = 3C - 2I_2$$

$$C^3 = 3C - 2I_2$$

3. A partir des questions 1 et 2, conjecturer, pour tout entier naturel non nul n , l'expression de la matrice C^n en fonction de C et de I_2 et la démontrer par récurrence.

On a : $C = 1 \times C - 0 \times I_2$ puis, d'après les questions précédentes : $C^2 = 2 \times C - 1 \times I_2$ et $C^3 = 3 \times C - 2 \times I_2$.

On peut conjecturer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = n \times C - (n-1) \times I_2$.

Montrons cette égalité par récurrence.

On pose donc : \mathcal{P}_n : « $C^n = n \times C - (n-1) \times I_2$ ».

Initialisation.

On vient de voir que \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 étaient vraies.

Hérédité.

Soit n un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose \mathcal{P}_n vraie. On a donc : $C^n = n \times C - (n-1) \times I_2$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= C^n \times C = [n \times C - (n-1) \times I_2] \times C = n \times C^2 - (n-1) \times I_2 \times C = n \times C^2 - (n-1) \times C \\ &= n \times (2 \times C - I_2) - (n-1) \times C = [2n - (n-1)] \times C - n \times I_2 = (n+1) \times C - [(n+1)-1] \times I_2 \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion.

La propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = n \times C - (n-1) \times I_2$$