Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.
La calculatrice graphique est autorisée

Exercice N°1 (6 points)

On considère les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{8}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}\ \text{et}\ R=\begin{pmatrix}\frac{8}{11} & -\frac{8}{11}\\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11}\end{pmatrix}$$

1. Montrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* non nul : $N^n = N$ et $R^n = R$.
2. Montrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* non nul : $M^n = N + \frac{1}{12^n}R$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

Exercice N°2 (7 points)

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et on rappelle $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. A la main ou à l'aide de la calculatrice, donner les matrices M^2, M^3 et M^4.
2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $M^{4n} = (-4)^n I_2$.
3. Pour tout entier naturel *n*, exprimer, en justifiant (un raisonnement par récurrence est inutile), M^n en fonction de *q* et I_2, *M*, M^2 ou M^3, où *q* est le quotient dans la division euclidienne de *n* par 4.
   (on distinguera plusieurs cas suivant le reste de la division euclidienne de *n* par 4)

Exercice N°3 (7 points)

On considère la matrice $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -9 & 4\end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels *x* et *y* tels que $C^2 = xC + yI_2$.
2. En utilisant cette relation, exprimer C^3 en fonction de *C* et de I_2.
3. A partir des questions 1 et 2, conjecturer, pour tout entier naturel non nul *n*, l'expression de la matrice C^n en fonction de *C* et de I_2 et la démontrer par récurrence.