

**Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.**

La calculatrice est autorisée.

Corrigé

Exercice N°1

Démontrer (sans raisonnement par récurrence !) que pour tout entier naturel n , les nombres suivants sont divisibles par 2 et par 3 (une indication : tout entier naturel n est de la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$...):

- $n^3 + 11n$.
- $n(2n+1)(7n+1)$.

Pour tout entier naturel n , on a : $n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$.

Si n est pair, il en va de même du produit $n(n^2 + 11)$.

Si n est impair, il en va de même de n^2 . Mais alors le facteur $n^2 + 11$ est pair comme somme de deux entiers impairs. Ainsi, le produit $n(n^2 + 11)$ est encore pair.

Finalement, quelle que soit la parité de n , le produit $n(n^2 + 11)$ est pair.

Si n est un multiple de 3 ($n = 3k$), alors il en va de même du produit $n(n^2 + 11)$.

Si $n = 3k + 1$, on a : $n^2 + 11 = (3k + 1)^2 + 11 = 9k^2 + 6k + 1 + 11 = 3(3k^2 + 2k + 4)$ qui est donc divisible par 3.

Enfin, si $n = 3k + 2$, on a : $n^2 + 11 = (3k + 2)^2 + 11 = 9k^2 + 12k + 4 + 11 = 3(3k^2 + 4k + 5)$ qui est donc divisible par 3.

Ainsi, quel que soit le reste de la division euclidienne de n par 3, le produit $n(n^2 + 11)$ est divisible par 3.

Finalement :

Pour tout entier naturel n , $n^3 + 11n = n(n^2 + 11)$ est divisible par 2 et par 3.

Si n est pair, il en va de même du produit $n(2n+1)(7n+1)$.

Supposons maintenant que n soit impair ($n = 2k + 1$). n et $2n + 1$ sont impairs mais $7n + 1 = 7(2k + 1) + 1 = 14k + 8 = 2(7k + 4)$ est pair.

Dans ce cas, le produit $n(2n+1)(7n+1)$ est encore pair.

Finalement, quelle que soit la parité de n , le produit $n(2n+1)(7n+1)$ est pair.

Si n est un multiple de 3 ($n = 3k$), alors il en va de même du produit $n(2n+1)(7n+1)$.

Si $n = 3k + 1$, on a : $2n + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 2 + 1 = 3(2k + 1)$ qui est donc divisible par 3.

Enfin, si $n = 3k + 2$, on a : $7n + 1 = 7(3k + 2) + 1 = 6k + 14 + 1 = 3(2k + 5)$ qui est donc divisible par 3.

Ainsi, quel que soit le reste de la division euclidienne de n par 3, le produit $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3.

Finalement :

Pour tout entier naturel n , $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice N°2

Déterminer la division euclidienne de -422 par -13 :

- En utilisant la définition.
- En déterminant d'abord la division euclidienne de 422 par 13 .

Notons classiquement q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de -422 par -13 : $-422 = -13 \times q + r$ avec $0 \leq r < 13$.

De l'égalité, nous tirons : $r = -422 + 13q$.

L'encadrement de r se réécrit alors : $0 \leq -422 + 13q < 13$, soit : $422 \leq 13q < 435$.

Le seul multiple de 13 dans l'intervalle $\llbracket 422 ; 434 \rrbracket$ est $33 \times 13 = 429$. On a donc $q = 33$.

Il vient alors : $r = -422 + 13q = -422 + 13 \times 33 = -422 + 429 = 7$.

Finalement : $-422 = -13 \times 33 + 7$.

En procédant de façon similaire ou en travaillant directement à la calculatrice, on a :

$$422 = 13 \times 32 + 6$$

On en tire : $-422 = -13 \times 32 - 6 = -13 \times 32 - 13 + 13 - 6 = -13 \times 33 + 7$.

On a ainsi retrouvé le résultat obtenu ci-dessus.

La division euclidienne de -422 par -13 s'écrit : $-422 = -13 \times 33 + 7$.

Exercice N°3

1. A l'aide de votre calculatrice, donner les diviseurs positifs de 21 648 et 33 456 dont l'écriture décimale comporte exactement 4 chiffres.
2. Déterminer un entier naturel n vérifiant :
 - a. L'écriture décimale de n comporte exactement quatre chiffres.
 - b. Le reste de la division euclidienne de 21 685 par n est égal à 37.
 - c. Le reste de la division euclidienne de 33 509 par n est égal à 53.

1. Pour 21 648, on obtient : 1 353, 1 804, 1 968, 2 706, 3 608, 5 412 et 7 216.
Pour 33 456, on obtient : 1 394, 1 968, 2 091, 2 788, 4 182, 5 576 et 8 364.

Les diviseurs positifs de 21 648 dont l'écriture décimale comporte exactement quatre chiffres sont : 1 353, 1 804, 1 968, 2 706, 3 608, 5 412 et 7 216.

Les diviseurs positifs de 33 456 dont l'écriture décimale comporte exactement quatre chiffres sont : 1 394, 1 968, 2 091, 2 788, 4 182, 5 576 et 8 364.

2. Le reste de la division euclidienne de 21 685 par n est égal à 37.
On a donc : $21\,685 = nq + 37$, d'où $nq = 21\,685 - 37 = 21\,648$.
L'entier n divise donc 21 648.

Le reste de la division euclidienne de 33 509 par n est égal à 53.
On a donc : $33\,509 = nq' + 53$, d'où $nq' = 33\,509 - 53 = 33\,456$.
L'entier n divise donc 33 456.

On cherche donc un diviseur positif de quatre chiffres des entiers 21 648 et 33 456.
D'après la première question, il vient immédiatement $n = 1\,968$.

Il existe un unique entier naturel n de quatre chiffres
dont le reste de la division euclidienne de 21 685 par n est égal à 37
et dont le reste de la division euclidienne de 33 509 par n est égal à 53.
Cet entier est $n = 1\,968$.

Exercice N°4

Soit a un entier naturel.

- Développer $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.
- Le nombre $a^4 + a^2 + 1$ peut-il être premier ?
- En vous aidant des questions précédentes, donner une factorisation de $A_1 = 10101$.
- Généraliser le résultat de la question précédente pour $A_k = 1 \underbrace{00\dots0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 \underbrace{00\dots0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

1. On a :

$$\begin{aligned} (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) &= a^2 \times (a^2 - a + 1) + a \times (a^2 - a + 1) + 1 \times (a^2 - a + 1) \\ &= a^2 \times a^2 - a^2 \times a + a^2 + a \times a^2 - a \times a + a + a^2 - a + 1 \\ &= a^4 - \cancel{a^3} + \cancel{a^2} + \cancel{a^3} - \cancel{a^2} + a + a^2 - a + 1 \\ &= a^4 + a^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\forall a \in \mathbb{N}, (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 + a^2 + 1$$

2. Supposons que $a^4 + a^2 + 1$ soit premier.

On a nécessairement $a \neq 0$ (sans quoi $a^4 + a^2 + 1 = 1$) et donc $-a < a$ puis $a^2 - a + 1 < a^2 + a + 1$.

Comme $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$, on déduit de ce qui précède :

$$a^2 - a + 1 = 1 \text{ et } a^2 - a + 1 = a^4 + a^2 + 1.$$

Il vient, en tenant compte du fait que a est non nul :

$$\begin{cases} a^2 - a + 1 = 1 \\ a^2 + a + 1 = a^4 + a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ a = a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ a^4 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Le nombre } a^4 + a^2 + 1 \text{ est premier si, et seulement si, } a = 1 \text{ et vaut alors 3.}$$

3. $A_1 = 10101 = 10\,000 + 100 + 1 = 10^4 + 10^2 + 1$.

Le nombre A_1 est donc de la forme $a^4 + a^2 + 1$ avec $a = 10$.

D'après la question 1, on a : $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$. On en déduit ici :

$$A_1 = 10101 = 10^4 + 10^2 + 1 = (10^2 + 10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 111 \times 91$$

$$A_1 = 10101 = 111 \times 91$$

4. Soit $A_k = 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel k non nul, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_k &= 1 \underbrace{000\dots 00}_{(2k-1)+1+(2k-1)+1 \text{ fois le chiffre "0"}} + 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1+1 \text{ fois le chiffre "0"}} + 1 \\ &= 1 \underbrace{000\dots 00}_{4k \text{ fois le chiffre "0"}} + 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k \text{ fois le chiffre "0"}} + 1 \\ &= 10^{4k} + 10^{2k} + 1 \\ &= (10k)^4 + (10k)^2 + 1 \end{aligned}$$

En tenant compte de la question 2, il vient alors ($a = 10^k$) :

$$\begin{aligned} A_k &= 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 \\ &= (10k)^4 + (10k)^2 + 1 \\ &= \left[(10k)^2 + 10k + 1 \right] \times \left[(10k)^2 - 10k + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A_k = 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 \underbrace{00\dots 0}_{2k-1 \text{ fois le chiffre "0"}} 1 = \left[(10k)^2 + 10k + 1 \right] \times \left[(10k)^2 - 10k + 1 \right]$$

Petit bonus

En vous « contentant » de transformer (mais sans l'effectuer !) le calcul $A = 70^2 + 70 + 71$, montrer que le nombre A n'est pas premier.

On a : $A = 70^2 + 70 + 71 = A = 70^2 + 70 + 70 + 1 = 70^2 + 2 \times 70 + 1 = (70 + 1)^2 = 71^2$.
 A n'est donc pas premier !

$A = 71^2$ n'est pas premier.