Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
Le barème est donné à titre indicatif.

La calculatrice est interdite.

CORRIGE

Question de cours (3 points)

Démontrer que la relation de congruence est compatible avec la multiplication.

Cf. le cours.

Exercice N°1 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est divisible par 7 :

- à l'aide de la relation de congruence.
- en raisonnant par récurrence.

Remarquons que l'on a : $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$ et $2^{n+2} = 4 \times 2^n$.
Comme $9 \equiv 2\,(7)$, il vient, pour tout entier naturel n : $9^n \equiv 2^n\,(7)$ puis $3 \times 9^n \equiv 3 \times 2^n\,(7)$.
Comme $4 \equiv -3\,(7)$, on a : pour tout entier naturel n : $4 \times 2^n \equiv -3 \times 2^n\,(7)$.
En définitive : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3 \times 9^n + 4 \times 2^n \equiv 3 \times 2^n + (-3) \times 2^n\,(7)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0\,(7)$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Considérons maintenant les propriétés $\mathscr{P}_n$: « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 ».
Pour $n = 0$, on a : $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3^{2\times 0+1} + 2^{0+2} = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$ qui est bien divisible par 7.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Supposons alors que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un entier naturel n quelconque fixée.
On a donc : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

On s'intéresse à $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$.
On a : $3^{2n+3}+2^{n+3}=3^2\times 3^{2n+1}+2^1\times 2^{n+2}=9\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$.
Mais d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel k tel que : $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$.
Soit : $3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$.
D'où :

$$\begin{aligned}3^{2n+3}+2^{n+3}&=9\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}=9\times\left(7k-2^{n+2}\right)+2\times 2^{n+2}\\&=7\times 9k-9\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2}=7\times 9k-7\times 2^{n+2}\\&=7\times\left(9k-2^{n+2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}, \mathscr{P}_n$ est vraie.

Exercice N°2 (3 points)

En raisonnant avec des congruences modulo 4, démontrer que l'équation $7x^2-4y^2=1$ d'inconnues x et y entiers relatifs n'admet pas de solution.

On veut résoudre : $7x^2=4y^2+1$.
Si (x,y) est un couple solution de cette équation, on en déduit que $7x^2$ est congru à 1 modulo 4 (plus prosaïquement ici : que le reste de la division euclidienne de $7x^2$ par 4 est égal à 1.

Etudions donc $7x^2$ en étudiant les quatre possibilités au niveau du reste de la division euclidienne de x par 4.
Si $x\equiv 0\,(4)$ alors $x^2\equiv 0\,(4)$ et $7x^2\equiv 0\,(4)$.
Si $x\equiv 1\,(4)$ alors $x^2\equiv 1\,(4)$ et $7x^2\equiv 7\,(4)$. Comme $7\equiv 3\,(4)$, on a finalement : $7x^2\equiv 3\,(4)$.
Si $x\equiv 2\,(4)$ alors $x^2\equiv 4\,(4)$ soit $x^2\equiv 0\,(4)$ et $7x^2\equiv 0\,(4)$.
Si $x\equiv 3\,(4)$ alors $x^2\equiv 9\,(4)$ soit $x^2\equiv 1\,(4)$ et $7x^2\equiv 7\,(4)$. Comme $7\equiv 3\,(4)$, on a encore : $7x^2\equiv 3\,(4)$.

En définitive :

- Si x est pair, alors $7x^2$ est divisible par 4.
- Si x est impair alors le reste de la division euclidienne de $7x^2$ par 4 est égal à 3.

Ainsi, pour toute valeur de l'entier x, $7x^2$ ne sera jamais congru à 1 modulo 4.

L'équation proposée n'admet pas de solution.